TD n°1 Théorie de la mesure

Polisano Kévin

10 octobre 2010

Exercice 1

Les singletons sont de mesure nulle (car la mesure de Lebesgue vérifie $\lambda([a,a]) = a - a = 0$). Et $\mathbb{Q}$ étant dénombrable on peut écrire $\mathbb{Q} = \cup_{n\geqslant 0}\{p_n\}$ d'où en passant à la mesure, par sous-additivité :

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{n\geqslant 0} \lambda(\{p_n\}) = 0$$

Exercice 2

1.

$$K_1 = \mathcal{T}(K_0) = \{[0,\tfrac{1}{3}],[\tfrac{2}{3},1]\}$$

$$K_2 = \mathcal{T}(K_1) = \{[0,\tfrac{1}{9}],[\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{3}],[\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{9}],[\tfrac{8}{9},1]\}$$

$$K_3 = \mathcal{T}(K_2) = \{[0,\tfrac{1}{27}],[\tfrac{2}{27},\tfrac{1}{9}],[\tfrac{2}{9},\tfrac{6}{27}],[\tfrac{8}{27},\tfrac{1}{3}],[\tfrac{2}{3},\tfrac{19}{27}],[\tfrac{20}{27},\tfrac{7}{9}],[\tfrac{8}{9},\tfrac{25}{27}],[\tfrac{26}{27},1]\}$$

2. Les ensembles K_n sont mesurables car réunions finies de segments de $[0,1]$ qui sont mesurables pour la mesure de Lebesgue. De plus la suite (K_n) est décroissante par construction, donc :

$$\mu(K) = \mu(\cap_{n\geqslant 0} K_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(K_n)$$

Par ailleurs les segments d'un ensemble K_n ont même longueur

$$\ell_n = \frac{\ell_{n-1}}{3} = ... = \frac{\ell_0}{3^n} = \frac{1}{3^n}$$

Soit M_n le nombre de segments de K_n on a, toujours par construction :

$$M_n = 2M_{n-1} = 2^n M_0 = 2^n$$

Ainsi $\mu(K_n) = 2^n \times \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ d'où :

$$\boxed{\mu(K) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0}$$

3. Montrons par récurrence que :

$$P_n : x \in K_n \Longleftrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3^i} + r \text{ avec } x_i \in \{0,2\}, r \in [0, \frac{1}{3^n}]$$

P_1 est vraie : $x \in K_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1] \Leftrightarrow x \in [0,\frac{1}{3}]$ ou $x = \frac{2}{3} + r$ avec $r \in [0,\frac{1}{3}]$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $y \in K_{n+1} \subset K_n \Rightarrow y = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{3^k} + r_y$ avec $y_k \in \{0,2\}$ et $r_y \in [0, \frac{1}{3^n}]$.

• Si $0 \leqslant r_y < \frac{1}{3^{n+1}}$ alors on pose $y_{n+1} = 0$.

• Si $\frac{1}{3^{n+1}} \leqslant r_y \leqslant \frac{1}{3^n}$ alors on pose $y_{n+1} = 2$ et $r'_y \in [0, \frac{1}{3^{n+1}}]$.

$\boxed{\Leftarrow}$

4. Raisonnons par l'absurde, supposons K dénombrable, on peut énumérer ses termes $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. Ecrivons leur développement triadique (comme en 3.) :

$$\forall n \geqslant 1, \quad x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{n,k}}{3^k}$$

Et construisons un $x \in K$ n'étant égal à aucun des x_n :

Pour cela on va écrire :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^i} \text{ avec } x_k = \begin{cases} 0 \text{ si } x_{k,k} = 2 \\ 2 \text{ sinon} \end{cases}$$

De cette façon $x \in K$ d'après 3. et n'est égal à aucun des x_n car il diffère d'au moins un bit (en base 3) de chacun d'eux. On en conclut que :

$$\boxed{K \text{ n'est pas dénombrable}}$$

remarque : On a construit un ensemble **non dénombrable et de mesure nulle**.

Exercice 4

1. On pose $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \backslash A_0$ et $B_n = A_n \backslash \cup_{i=0}^{n-1} A_i$.

On a $B_0 = A_0$, $B_{n+1} = A_{n+1} \backslash \cup_{i=0}^{n} A_i$, par une récurrence immédiate :

$$\cup_{i=0}^{n+1} B_i = B_{n+1} \cup (\cup_{i=0}^{n} B_i) = (A_{n+1} \backslash \cup_{i=0}^{n} A_i) \cup (\cup_{i=0}^{n} A_i) = A_{n+1} \cup (\cup_{i=0}^{n} A_i) = \cup_{i=0}^{n+1} A_i$$

D'autre part puisque $B_i \subset A_i$ en écrivant $A_i = B_i \cup A_i \backslash B_i$ on a par incompatibilité :

$$\mu(A_i) = \mu(B_i) + \mu(A_i \backslash B_i) \geqslant \mu(B_i)$$

Soit $i < j$ on a $B_i \cap B_j = (A_i \backslash \cup_{k=0}^{i-1} A_k) \cap (A_j \backslash \cup_{k=0}^{j-1} A_k)$.

Comme $i < j$ on a $(A_i \backslash \cup_{k=0}^{i-1} A_k) \subset A_i \subset \cup_{k=0}^{j-1} A_k$ donc $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Ainsi par sous-additivité :

$$\boxed{\mu(\cup A_n) = \mu(\cup B_n) = \sum \mu(B_n) \leqslant \mu(A_n)}$$

2. On pose $C = A \cap B$, $A' = A \backslash C$, $B' = B \backslash C$.

$A = A' \cup C$, $B = A' \cup C$ et $A \cup B = A' \cup B' \cup C$, A', B', C disjoints.

$$\begin{gathered} \mu(A) = \mu(A') + \mu(C) \\ \mu(B) = \mu(B') + \mu(C) \\ \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(C) + \mu(A') + \mu(B') + \mu(C) \end{gathered}$$

On voit alors que :

$$\boxed{\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)}$$

3. Soit (A_n) une suite croissante $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.

On pose $B_i = A_i \backslash A_{i-1}$, on a clairement les B_i disjoints et

$$\cup_{i=0}^{n} B_i = \cup_{i=0}^{n} A_i = A_n$$

$\sum_{i=0}^{n} \mu(B_i) = \mu(\cup_{i=0}^{n} B_i) = \mu(A_n)$ et comme $\cup_{i=0}^{n} B_i = \cup_{i=0}^{n} A_i = A_n$:

$$\boxed{\mu(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)}$$

4. Si $A \subset B$ et $\mu(B) < +\infty$ alors $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$, en effet :

$$\mu(B) = \mu(B \backslash A \cup A) = \mu(B \backslash A) + \mu(A)$$

Par conséquent en posant $\forall n > 0, B_n = A_0 \backslash A_n$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \mu(A_0) - \mu(\cap_{n>0} A_n) & = & \mu(A_0 \backslash \cap_{n>0} A_n) \\ & = & \mu(\cup_{n>0} B_n) \\ & \overset{3}{=} & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mu(B_n) \\ & = & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} (\mu(A_0) - \mu(A_n)) \end{array}$$

D'où :

$$\boxed{\mu(\cap_n A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)}$$